Lukuteoria

Loppukoe 17.3.2008

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Määrittele reaaliluvun α ketjumurtolukukehitelmä ja konvergentit $\frac{p_n}{q_n}, n = 1, 2, \cdots$. Osoita, että α:n ollessa irrationaalinen

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2},\ n = 1, 2, \cdots .$$

Minkä luvun ketjumurtokehitelmä on $[2, \overline{3, 6}]$? Mikä on tällöin 5. konvergentti?

2. a) Määrittele algebrallisen luvun α minimipolynomi p_α ja osoita se yksikäsitteiseksi. Olkoon $\delta = e^{2\pi i/p}$, missä p on alkuluku. Määritä luvun δ minimipolynomi.

   b) Oletetaan, että K on astetta n oleva lukukunta ja $\alpha \in K$. Määrittele luvun α kuntapolynomi f_α ja osoita, että f_α on minimipolynomin potenssi.

3. Määrittele Eukleiden alue ja osoita, että se on pääideaalialue. Todista tähän tulokseen nojautuen, että Eukleideen kunnan K kokonaislukujen rengas $\mathcal{O}_K$ on y.t.j.-alue. Osoita edelleen, että kunta $K = \mathbb{Q}(i)$ on Eukleideen kunta.

4. Määrittele neliökunnan kokonaislukujen renkaan ideaalin $\mathcal{A} \neq \langle 0 \rangle$ kanoninen kanta $\{v, s + tw\}$ ja normi $N(\mathcal{A})$. Osoita, että $N(\mathcal{A}) = vt$. Esitä ideaali $\langle 5 \rangle \subset \mathcal{O}_K,\ K = \mathbb{Q}(i)$, alkuideaalien tulona ja määritä näiden alkuideaalien kanoniset kannat.

5. a) Osoita, että luku

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2^n}$$

   on irrationaalinen.

   b) Esitä (ilman todistusta) algebrallisten lukujen approksimointia koskeva Liouvillen lause ja osoita siihen nojautuen, että luku

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n!}}$$

   on transkendenttinen.