Lukuteoria

Loppukoe 18.5.2009

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Esitä ja todista polynomien $p \in \mathbb{Z}[x]$ jaottomuutta koskeva ns. Eisensteinin kriteerio. Tutki, onko polynomi $q(x) = \frac{2}{9}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + x^3 + \frac{1}{3}$ jaoton renkaassa $\mathbb{Q}[x]$.

2. a) Määrittele algebrallisen luvun α minimipolynomi p_α ja osoita se yksikäsitteiseksi. Olkoon $\delta = e^{2\pi i/p}$, missä p on alkuluku. Määritä luvun δ minimipolynomi.

   b) Oletetaan, että K on astetta n oleva lukukunta ja $\alpha \in K$. Määrittele luvun α kuntapolynomi f_α ja osoita, että f_α on minimipolynomin potenssi.

3. Määrittele lukukunnan kokonaislukujen kanta ja osoita, että tallainen kanta on olemassa. Oletetaan, että lukukunnan K kokonaisluvut $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ muodostavat kunnan kannan ja niiden diskriminantti $\triangle(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ on neliövapaa. Osoita, että $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ on lukukunnan K kokonaislukujen kanta.

4. Ratkaise A) tai B)

   A) Osoita, että neliökunnan $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ kokonaislukujen rengas on Eukleideen alue. Esitä tämän renkaan ideaalit

   $$\mathcal{A}_1 = \langle 6, 3+\sqrt{3} \rangle \text{ ja } \mathcal{A}_2 = \langle 2, 3+3\sqrt{3} \rangle$$

   pääideaaleina ja määritä niiden normit.

   B) Oletetaan tunnetuksi, että $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ on Eukleideen kunta. Osoita, että Diophantoksen yhtälön

   $$x^2 + 2 = y^3$$

   ainoat ratkaisut ovat $x = \pm 5, y = 3$.

5. Esitä ja todista algebrallisten lukujen rationaalisia approksimaatioita koskeva Liouvillen lause ja osoita siihen nojautuen luvut

   $$\alpha_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k^{n!}}, k = 2, 3, \cdots$$

   transkendenttisiksi.