Lukuteoria

Loppukoe 21.5.2007

1. Olkoon α irrationaaliluku. Osoita, että epäyhtälöllä

   $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$

   on äärettömän monta rationaalista ratkaisua $\frac{p}{q}$.

   (Jos käytät todistuksessa konvergentteja, osoita, että niillä on kyseinen ominaisuus.)

2. Olkoon $p > 2$ alkuluku. Osoita, että polynomi $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ on jaoton renkaassa $\mathbb{Q}[x]$. Osoita, edelleen, että $\delta = e^{2\pi i/p}$ toteuttaa yhtälön $f(\delta) = 0$ ja kunnat $\mathbb{Q}(\delta), \mathbb{Q}(\delta^2), \cdots, \mathbb{Q}(\delta^{p-1})$ ovat samat. Laske myös lukujen δ ja $\lambda = 1 - \delta$ normit.

3. Olkoon K algebrallinen lukukunta. Oletetaan, että $\alpha \in O_K$ ja sen normin itseisarvo $|N(\alpha)|$ $(N = N_K)$ on rationaalinen alkuluku. Osoita, että α on jaoton O_K:ssa. Olkoon $F = \mathbb{Q}(i)$. Onko O_F:n alkio $1+i$ tai $3-7i$ jaoton? Onko $(3+i)(3-i) = 2 \cdot 5$ esimerkki ei-yksikäsitteisesti tekijöihinjaosta renkaassa O_F?

4. Oletetaan tunnetuksi, että kunta $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ on Eukleideen kunta. Osoita, että Diofantoksen yhtälön $x^3 = y^2 + 2$ ainoat ratkaisut ovat $x = 3, y = \pm 5$.

5. Ratkaise <u>yksi</u> tehtävistä A, B tai C.

   A. Määrittele neliökunnan kokonaislukujen renkaan ideaalin $\mathcal{A} \neq < 0 >$ kanoninen kanta $\{v, s + tw\}$ ja normi $N(\mathcal{A})$. Osoita, että $N(\mathcal{A}) = vt$. Määritä ideaalin $< 1 - 2i > \subset O_K,\ K = \mathbb{Q}(i)$, kanoninen kanta.

   B. Osoita, että neliökunnan kokonaislukujen renkaan ideaaleille pätee:

   $$\mathcal{A} | \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C} \subset \mathcal{A}.$$

   C. Määritä seuraavien ideaalien kanoniset kannat:

   a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}),\quad < 3, 1 + 2\sqrt{-5} >$,

   b) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{10}),\quad < 6, 7 + 2\sqrt{10} >$.