Lukuteoria

Loppukoe 25.9.2006

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. a) Olkoon $b \geq 2$ luonnollinen luku. Esitä ja perustele välttämätön ja riittävä ehto sille, että reaaliluvun $\alpha > 0$ b-kantainen esitys on päättyvä.

   b) Osoita, että luku

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3^n}$$

   on irrationaalinen.

2. Todista lause: Kuntalaajennus $L : K$ on äärellinen jos ja vain jos L on algebrallinen K:n suhteen ja $\exists$ sellaiset alkiot $\alpha_1, ..., \alpha_s \in L (s < \infty)$, että $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_s)$.

3. Oletetaan, että $[K : \mathbb{Q}] = n$ ja $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{O}_K$. Määrittele lukujen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ diskriminantti $\triangle(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ja osoita, että $\triangle(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}$. Osoita edelleen, että on olemassa sellaiset luvut $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{O}_K$, että jokainen $\mathcal{O}_K$:n alkio on muotoa

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

   Määritä tällaiset luvut tapauksessa $K = \mathbb{Q}(\sqrt{20})$.

4. Määrittele neliökunnan K kokonaislukujen renkaan $\mathcal{O}_K$ ideaalin $\mathfrak{a}$ kanoninen kanta, diskriminantti $d(\mathfrak{a})$ ja normi $N(\mathfrak{a})$. Osoita, että $d(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{a})^2 d$, missä d on kunnan K diskriminantti ja $\mathfrak{a} \neq \langle 0 \rangle$.

5. Esitä (ilman todistusta) algebrallisen luvun rationaalisia aproksimaatioita käsittelevä Liouvillen lause. Todista tähän lauseeseen nojautuen, että luku

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 7^{-n!}$$

   on transkendenttinen.