Lukuteoria

Loppukoe 26.5.2008

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Todista Eisensteinen kriteerio: Olkoon
$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x].$$
Jos on olemassa sellainen alkuluku p, että

   a) $p \nmid a_n$, b) $p|a_i\ \forall i = 0, 1, \cdots, n-1$ ja c) $p^2 \nmid a_0$,

   niin $p(x)$ on jaoton renkaassa $\mathbb{Q}[x]$.

2. Suorita A) tai B)

   A) Olkoon $b \geq 2$ luonnollinen luku. Miten positiivisen reaaliluvun α $b-$kantainen esitys muodostetaan? Esitä ja perustele välttämätön ja riittävä ehto sille, että esitys on (i) päättyvä, (ii) jaksollinen. Minkä luvun kehitelmä on $(0, \overline{25})_6$?

   B) Määrittele reaaliluvun α ketjumurtokehitelmä ja konvergentit $\frac{p_n}{q_n}$, $n = 1, 2, \cdots$. Laske luvun $\sqrt{7}$ ketjumurtokehitelmä ja 3. konvergentti.
   Osoita tulos: Parilliset konvergentit muodostavat vähenevän ja parittomat kasvavan jonon.

3. Oletetaan, että $[K : \mathbb{Q}] = n$ ja $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathcal{O}_K$. Määrittele lukujen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ diskriminantti $\triangle(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ ja osoita, että $\triangle(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}$. Osoita edelleen, että on olemassa sellaiset luvut $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathcal{O}_K$, että jokainen $\mathcal{O}_K$:n alkio on muotoa
$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$
Määritä tällaiset luvut tapauksessa $K = \mathbb{Q}(\sqrt{20})$.

4. Määrittele Eukleideen alue ja osoita, että tällainen alue on pääideaalialue. Tunnetusti kunnan $K = \mathbb{Q}(i)$ kokonaislukujen rengas on Eukleideen alue, joten sen ideaalit ovat pääideaaleja. Esitä ideaali $\langle 3 + i,\ 1 - i\rangle$ pääideaalina.

5. Ratkaise A tai B.

   A) Esitä ja todista algebrallisten lukujen rationaalisia approksimaatioita koskeva Liouvillen lause.

   B) Esitä (ilman todistusta) algebrallisten lukujen rationaalisia approksimaatioita koskeva Liouvillen lause ja osoita siihen nojautuen, että luku
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n!}}$$
on transkendenttinen.