Lukuteoria

Loppukoe 29.1.2007

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Suorita A) tai B)

   A) Olkoon $b \geq 2$ luonnollinen luku. Miten positiivisen reaaliluvun α $b-$kantainen esitys muodostetaan? Esitä ja perustele välttämätön ja riittävä ehto sille, että esitys on (i) päättyvä, (ii) jaksollinen. Minkä luvun kehitelmä on $(0, \overline{25})_6$?

   B) Määrittele reaaliluvun α ketjumurtokehitelmä ja konvergentit $\frac{p_n}{q_n}$, $n = 1, 2, \cdots$. Laske luvun $\sqrt{7}$ ketjumurtokehitelmä ja 3. konvergentti.
   Osoita tulos: Parilliset konvergentit muodostavat vähenevän ja parittomat kasvavan jonon.

2. Olkoon $p > 2$ alkuluku. Osoita, että polynomi $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ on jaoton renkaassa $\mathbb{Q}[x]$. Oletetaan, että ρ toteuttaa yhtälön $f(\rho) = 0$. Määritä luvun $\alpha = \rho + 2$ minimipolynomi. Onko luku $\rho + \rho^{-1}$ kokonainen algebrallinen luku?

3. Olkoon $K = \mathbb{Q}(\theta)$ astetta n oleva algebrallinen lukukunta. Määrittele luvun $\alpha \in K$ minimipolynomi p_α ja kuntapolynomi f_α. Osoita, että f_α on p_α:n potenssi. Olkoon $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. Määritä K:n alkioiden $\sqrt{2}$ ja $\sqrt[4]{2} + 1$ minimipolynomit ja kuntapolynomit.

4. a) Määrittele Eukleideen alue ja osoita, että neliökunnan $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ koko-naislukujen rengas on Eukleideen alue.

   b) Tunnetusti Eukleideen alue on pääideaalialue. Esitä a) kohdan kokonaislukujen renkaan ideaalit
   $$a_1 = \langle 6, 3 + \sqrt{3} \rangle, a_2 = \langle 2, 3 + 3\sqrt{3} \rangle$$
   pääideaaleina ja määritä niiden normit.

5. a) Osoita, että luku
   $$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2^n}$$
   on irrationaalinen.

   b) Esitä (ilman todistusta) algebrallisten lukujen approksimointia koskeva Liouvillen lause ja osoita siihen nojautuen, että luku
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n!}}$$
   on transkendenttinen.