

1. Olkoon $p \in \mathbb{P}$ ja $k \in \mathbb{N}$.

a) Määrä $\mu(p^k)$, $\lambda(p^k)$, $\sigma(p^k)$.

b) Mitkä funktioista μ , σ , λ ovat multiplikatiivisia ja mitkä täydellisesti multiplikatiivisia? Lyhyet perustelut.

2. a) Osoita, että jos n on täydellinen luku, niin

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2.$$

b) Näytä, että $N = \sigma * \mu$.

3. Olkoon $f \in \mathcal{M}$. Näytä, että

$$f^{-1}(p^2) = f(p)^2 - f(p^2), \quad \forall p \in \mathbb{P}.$$

4. Olkoot $f, g \in \mathcal{A}$. Osoita, että

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \Leftrightarrow \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Esitä tarvittavat tulokset yksityiskohtaisesti.