

## EI LASKIMIA, EI PUHELIMIA

1. Olkoon  $p \in \mathbb{P}$  ja  $k \in \mathbb{N}$ .

(a) Määrä  $\mu(p^k)$ ,  $\lambda(p^k)$ ,  $\sigma(p^k)$ .

(b) Mitkä funktioista  $\mu, \sigma, \lambda$  ovat multiplikatiivisia ja mitkä täydellisesti multiplikatiivisia? Lyhyet perustelut.

2. (a) Osoita, että jos  $n$  on täydellinen luku, niin

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = 2.$$

(b) Näytä, että  $\sigma = \varphi * d$ . (Tentissä oli virheellisesti  $\sigma = \varphi * I$ .)

3. Olkoot  $f, g \in \mathcal{A}$ . Osoita, että

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \Leftrightarrow \quad g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Esitä tarvittavat tulokset yksityiskohtaisesti.

4. Olkoon  $p \in \mathbb{P}$ . Esitä Bellin sarjat  $\lambda_p(T)$  ja  $\mu_p(T)$  rationaalifunktioina.

5. Osoita, että

$$\sum_{1 \leq k \leq x} d(k) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \mathcal{O}(x^{1/2}).$$