LUKUTEORIA I

1. välikoe 9.3.2009

EI LASKIMIA, EI PUHELIMIA

1. (a) Määrää
$$2^6 - 1 - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \pmod{7^2}.$$
   (b) Määrää
$$\binom{1/2}{7} \pmod{11}.$$

2. (a) Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Laske summa
$$\sum_{k=0}^{m} k \cdot k!.$$
   (b) Olkoon $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ ja $p \equiv 1 \pmod{3}$. Määrää sellainen $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq p-1$, että
$$\frac{1}{3} \equiv k \pmod{p}.$$

3. Olkoot $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ aina, kun $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Osoita, että
$$f_{n+m} = f_{n+1} f_m + f_n f_{m-1}$$
   aina, kun $n, m \in \mathbb{N}$. (Voit käyttää allolevaa tulosta (F).)

   (b) Osoita, että
$$f_n | f_{3n}$$
   aina, kun $n \in \mathbb{N}$.

4. Olkoon $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$. Osoita, että
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(p-1)^2} \equiv 0 \pmod{p}.$$

(F) Fibonaccin luvuille pätee (ei saa todistaa)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$