LUKUTEORIA I

1. Välikoe (2. versio) 18.3.2009 (T. Matala-aho)

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. (a) Olkoot $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. Osoita, että
$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$
   (b) Määrää
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{25}{7} \pmod{5^3}.$$

2. (a) Olkoon $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ ja $p \equiv 2 \pmod 3$. Määrää sellainen $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq p-1$, että
$$\frac{1}{3} \equiv k \pmod p.$$
   (b) Olkoot $r, m \in \mathbb{Z}^+$. Osoita teleskooppiperiaatetta käyttäen, että
$$\sum_{k=1}^{m} (k)_r = \frac{(m)_{r+1}}{r+1}.$$

3. Olkoot $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ aina, kun $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$
aina, kun $n \in \mathbb{Z}^+$.

4. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

   (a) Osoita, että jos $n = 2^r$ ja $r \in \mathbb{Z}^+$, niin
$$\binom{2n-1}{n-1} \equiv 1 \pmod 2.$$
   (b) Osoita, että jos
$$\binom{2n-1}{n-1} \equiv 1 \pmod 2,$$
   niin $n = 2^r$ jollakin $r \in \mathbb{Z}^+$.