**LUKUTEORIA I**

Kesätentti 15.6.2009, T. Matala-aho

EI LASKIMIA, EI PUHELIMIA

1. (a) Määrää
$$\binom{-1/2}{5} \pmod{11}.$$

   (b) Olkoon $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ ja $p \equiv 1 \pmod 3$. Määrää sellainen $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq p-1$, että
$$\frac{1}{3} \equiv k \pmod p.$$

2. Olkoot $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}$.
Osoita, että
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

   (a) aina, kun $n \in \mathbb{Z}^+$.

   (b) aina, kun $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

3. Johda 1. lajin Stirlingin lukujen palautuskaava
$$s_1(n,m) = s_1(n-1,m-1) - (n-1)s_1(n-1,m) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+, \quad 1 \leq m \leq n-1.$$

4. Johda Eulerin lukujen palautuskaava
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+,$$
lähtien generoivasta sarjasta
$$\frac{2e^T}{e^{2T}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} T^n$$

5. Olkoon $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}, p \equiv 2 \pmod 3$ ja $q = (2p-1)/3$. Osoita, että
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{q} \equiv 0 \pmod p.$$
Tarkat perustelut.