LUKUTEORIA I (5 op)

Loppukoe 1.11.2010 EI LASKIMIA

1. a) Määrää

$$\binom{101}{99} \pmod{101}.$$

b) Määrää

$$\binom{1/2}{5} \pmod{7}.$$

2. Olkoot $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ sekä $l_0 = 2$, $l_1 = 1$ ja $l_{k+2} = l_{k+1} + l_k$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}$.

a) Näytä, että

$$f_{n+m} = f_{n+1}f_m + f_n f_{m-1}$$

aina, kun $n, m \in \mathbb{N}$. (Voit käyttää alla olevaa tulosta (F).)

b) Näytä, että

$$2f_{n+m} = f_n l_m + f_m l_n.$$

3. Todista, että luvulle

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

pätee $e \notin \mathbb{Q}$.

4. a) Määrää sellainen $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 6$, että

$$\frac{2}{3} \equiv k \pmod{7}.$$

b) Olkoon $p \in \mathbb{P}$. Todista, että

$$\binom{2p}{p} \equiv 2\left(1 + p\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-1}\right)\right) \pmod{p^2}.$$

(F) Fibonaccin luvuille pätee (ei saa todistaa)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$