LUKUTEORIA I (8op; Vain jos merkitty HOPSiin)

Loppukoe 1.11.2010 EI LASKIMIA

TEHTÄVISTÄ 3 ja 4 yhteensä vähintään 10 pistettä (10 pistettä/tehtävä)

1. a) Määrää

$$\binom{101}{99} \pmod{101}.$$

b) Määrää

$$\binom{1/2}{5} \pmod{7}.$$

2. Olkoot $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ sekä $l_0 = 2$, $l_1 = 1$ ja $l_{k+2} = l_{k+1} + l_k$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}$. Näytä, että

$$f_{n+m} = f_{n+1}f_m + f_n f_{m-1}$$

aina, kun $n, m \in \mathbb{N}$. (Voit käyttää alla olevaa tulosta (F).)

3. Olkoon $p \in \mathbb{P}$. Näytä, että Bernoullin luvulle B_2 pätee

$$pB_2 \equiv 1^2 + 2^2 + \cdots + (p-1)^2 \pmod{p}.$$

4. Johda 1. lajin Stirlingin lukujen palautuskaava

$$s_1(n,m) = s_1(n-1,m-1) - (n-1)s_1(n-1,m) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+, \quad 1 \le m \le n-1.$$

5. a) Määrää sellainen $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le k \le 6$, että

$$\frac{2}{3} \equiv k \pmod{7}.$$

b) Olkoon $p \in \mathbb{P}$. Todista, että

$$\binom{2p}{p} \equiv 2\left(1 + p\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}\right)\right) \pmod{p^2}.$$

(F) Fibonaccin luvuille pätee (ei saa todistaa)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$