LUKUTEORIA I

Loppukoe 3.3.2008 EI LASKIMIA, EI PUHELIMIA

1. (a) Näytä laskemalla, että

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\equiv\frac{25}{7}\pmod{5^3}.$$

(b) Määrää luvun

$$\binom{102}{51}$$

jakojäännös (mod 101).

2. Olkoon $p\in\mathbb{P}$. Näytä, että Bernoullin luvulle B_2 pätee

$$pB_2\equiv 1^2+2^2+\cdots+(p-1)^2\pmod{p}.$$

3. (a) Olkoot $f_0=0$, $f_1=1$ ja $f_{k+2}=f_{k+1}+f_k$ aina, kun $k\in\mathbb{N}$. Osoita, että

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}f_{n+1}&f_n\\f_n&f_{n-1}\end{pmatrix}$$

aina, kun $n\in\mathbb{Z}^+$.

(b) Osoita, että

$$f_{n+1}f_{n-1}-f_n^2=(-1)^n$$

aina, kun $n\in\mathbb{Z}^+$.

4. Johda 1. lajin Stirlingin lukujen palautuskaava

$$s_1(n,m)=s_1(n-1,m-1)-(n-1)s_1(n-1,m)\quad\forall\, n\in\mathbb{Z}^+,\quad 1\le m\le n-1.$$

5. Olkoon

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Oletetaan, että $a,b,c\in\mathbb{Z}$ ja

$$ae^2+be+c=0.$$

Näytä, että $a=b=c=0$.