LUKUTEORIA I Loppukoe 25.5.2009 EI LASKIMIA, EI PUHELIMIA

1. a) Määrää
$$\binom{1/2}{7} \pmod{11}.$$
b) Olkoon $p \in \mathbb{P}_{\geq 5}$ ja $p \equiv 1 \pmod 3$. Määrää sellainen $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq p-1$, että
$$\frac{1}{3} \equiv k \pmod p.$$

2. Olkoot $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}$.

a) Osoita, että
$$f_{n+m} = f_{n+1} f_m + f_n f_{m-1}$$
aina, kun $n, m \in \mathbb{N}$. (Voit käyttää allolevaa tulosta (F).)

b) Osoita, että $f_n | f_{3n}$ aina, kun $n \in \mathbb{N}$.

3. Johda 1. lajin Stirlingin lukujen palautuskaava
$$s_1(n,m) = s_1(n-1,m-1) - (n-1)s_1(n-1,m) \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}^+, \quad 1 \leq m \leq n-1.$$

4. Todista, että luvulle
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$
pätee $e \notin \mathbb{Q}$.

5. Olkoon $n \in \mathbb{Z}^+$ ja $S_j(n) = \sum_{i=1}^{n} i^j$. Osoita, että
$$\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} S_j(n) = (n+1)^m - 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+.$$

(F) Fibonaccin luvuille pätee (ei saa todistaa)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$