LUKUTEORIA I (5OP)

Loppukoe 31.1.2011 EI LASKIMIA

1. a) Määrää sellainen $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 6$, että

$$\frac{2}{3} \equiv k \pmod 7.$$

b) Määrää

$$\binom{1/2}{5} \pmod 7.$$

2. Olkoot $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ aina, kun $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

aina, kun $n \in \mathbb{Z}^+$.

3. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Johda Bernoullin lukujen palautuskaava

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

lähtien generoivasta funktiosta

$$\frac{T}{e^T - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} T^n.$$

4. Olkoon $p \in \mathbb{P}_{\geq 7}$ ja

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p.$$

Osoita, että tällöin

$$f_{p-1} \equiv 0 \pmod p.$$