

LUKUTEORIA JA RYHMÄT

Loppukoe 7.5.2012

Ei laskimia, ei matkapuhelimia, ei taulukkokirjoja

1. a) Määrittele ekvivalenssirelaatio ja ekvivalenssiluokka. (2p)
b) Määritellään joukossa $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ relaatio R seuraavasti: aRb , jos $ab > 0$.
Osoita, että R on ekvivalenssirelaatio. Määrää lisäksi ekvivalenssiluokat. (4p)
2. a) Määrää Eukleideen algoritmin avulla lukujen 264 ja 96 suurin yhteinen tekijä (3p)
 $\text{sy}(264, 96)$ ja etsi sellaiset kokonaisluvut u ja v , että $\text{sy}(264, 96) = 264u + 96v$.
b) Ratkaise kongruenssiyhtälö (3p)
$$6x \equiv 9(20).$$
3. a) Onko ryhmä $(\mathbb{Z}_6, +)$ syklinen? Perustele! (2p)
b) Määrää ryhmän $(\mathbb{Z}_6, +)$ kaikki aliryhmät ja kaikki normaalit aliryhmät. (2p)
c) Muodosta ryhmän $(\mathbb{Z}_6, +)$ tekijäryhmä jonkin ei-triviaalin normaalin aliryhmän suhteen ja esitä ryhmätaulu. (2p)
4. a) Määrittele tekijäryhmä. (2p)
b) Olkoon G ryhmä ja $N \trianglelefteq G$. Osoita, että sivuluokkien tulo $aN \cdot bN = abN$ on hyvin määritelty. (2p)
c) Osoita, että $(\{aN | a \in G\}, \cdot)$ on ryhmä. (2p)
5. a) Määrittele homomorfismi ja isomorfismi. (2p)
b) Osoita, että samaa kertalukua oleva sykliset ryhmät ovat isomorfiset. (4p)

Laskut täydellisesti näkyviin, pelkkä vastaus ei riitä.

Perustele ratkaisusi täydellisesti.