

# LUKUTEORIA JA RYHMÄT

Loppukoe 31.10.2011

Ei laskimia, ei matkapuhelimia, ei taulukkokirjaa

1. a) Määrää ryhmän  $(\mathbb{Z}_{10}^*, \cdot)$  alkiot ja esitä ryhmätaulu.  
b) Onko ryhmä  $(\mathbb{Z}_{10}^*, \cdot)$  syklinen?  
c) Määrää eräs ryhmän  $(\mathbb{Z}_{10}^*, \cdot)$  kertalukua 2 oleva aliryhmä  $H$ .  
Onko kyseessä normaaliiryhmä?  
d) Määrää tekijäryhmän  $\mathbb{Z}_{10}^*/H$  alkiot ja esitä ryhmätaulu
2. a) Määrää lukujen 11550 ja 375 suurin yhteinen tekijä.  
Etsi lisäksi sellaiset kokonaisluvut  $x$  ja  $y$ , että

$$\text{syt}(11550, 375) = 11550x + 375y.$$

- b) Ratkaise kongruenssiyhtälö

$$14x \equiv 10(62).$$

3. Merkitään  $5\mathbb{Z} = \{5n | n \in \mathbb{Z}\}$ .
  - a) Onko  $(5\mathbb{Z}, +)$  ryhmä?
  - b) Onko  $(5\mathbb{Z}, \cdot)$  ryhmä?
4. a) Määrittele Eulerin  $\varphi$ -funktio  $\varphi(m)$ .  
b) Osoita, että jos  $p$  on alkuluku ja  $k \in \mathbb{Z}_+$ , niin  $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ .
5. a) Määrittele ryhmähomomorfismi  $f$ , homomorfismin  $f$  kuva  $\text{Im}(f)$  ja homomorfismin  $f$  ydin  $\text{Ker}(f)$ .  
b) Olkoon  $G = (\mathbb{Z}_5, +)$  ja  $f : G \rightarrow G$ , s.e  $f(a) = a^3 \forall a \in G$ . Onko kuvaus  $f$  ryhmähomomorfismi? Onko kuvaus  $f$  ryhmäisomorfismi? Määrää  $\text{Im}(f)$  ja  $\text{Ker}(f)$ .

**Laskut täydellisesti näkyviin, pelkkä vastaus ei riitä.**

**Perustele tehtävät riittävästi.**