

1. a) Määrää

$$\#\{k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq 7776, 7 \mid k\}.$$

b) Olkoot $k, n \in \mathbb{Z}^+$. Näytä, että

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}.$$

2. a) Laske

$$\frac{1}{13} - \frac{2}{5} \pmod{4}.$$

b) Laske

$$\binom{1/2}{4} \pmod{3}.$$

3. a) Määrää sellainen $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 12$, että

$$\frac{3}{5} \equiv k \pmod{13}.$$

b) Määrää kaikki sellaiset rationaaliluvut $r/s \in \mathbb{Q}$, että

$$\overline{r/s}^{-1} = \overline{6}$$

jakoäännösrenkaassa $\mathbb{Q}_{13}$.

4. a) Osoita, että

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Olkoon $p \in \mathbb{P}$. Määrää

$$\binom{p^{1000} + p^{101} - 1}{p^{100} + 1} \pmod{p}.$$