802328A LUKUTEORIAN PERUSTEET (5 op)

2./2 välikoe 16.1.2012 EI LASKIMIA

1. Johda teleskooppiperiaatteella arvo Fibonaccin lukujen summalle

$$\sum_{k=1}^{m} f_k, \quad m \in \mathbb{Z}^+.$$

2. Näytä, että Fibonaccin luvuille pätee

$$f_{n+m} = f_{n+1} f_m + f_n f_{m-1}$$

aina, kun $n, m \in \mathbb{N}$. (Voit käyttää alla olevaa tulosta (F).)

3. Näytä, että Bernoullin luvuille pätee

$$B_{2k+1} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Vihje: Käytä funktiota

$$G(T) = \frac{T}{e^T - 1} + \frac{T}{2}.$$

4. a) Todista, että

$$\frac{\log 12}{\log 15} \notin \mathbb{Q}.$$

b) Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Todista, että $x \in \mathbb{Q}$ täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen $n \in \mathbb{Z}$, että

$$\lfloor nx \rfloor = nx.$$

---

(F) Fibonaccin luvut määritellään asettamalla $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}$. Fibonaccin luvuille pätee (ei saa todistaa)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(B) Bernoullin luvut määritellään asettamalla

$$\frac{T}{e^T - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} T^n.$$