802328A LUKUTEORIAN PERUSTEET (5 op)

Loppukoe 7.5.2012 EI LASKIMIA

1. a) Määrää sellainen $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq 12$, että

$$\frac{3}{7} \equiv k \pmod{13}.$$

b) Laske

$$\binom{11/2}{4} \pmod{3}.$$

2. a) Näytä, että Fibonaccin luvuille pätee

$$f_{n+m} = f_{n+1} f_m + f_n f_{m-1}$$

aina, kun $n, m \in \mathbb{N}$. (Voit käyttää alla olevaa tulosta (F).)
b) Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Johda teleskooppiperiaatteella arvo summalle

$$\sum_{k=0}^{m} k \cdot k!.$$

3. Määrää yhtälön

$$(P) \qquad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}^+, \ a \perp b,$$

kaikki sellaiset ratkaisut (a, b, c), että $c - a = 2$.

4. a) Osoita, että

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Olkoot $L_1 = \mathrm{pyj}[\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}]$ ja $L_2 = \mathrm{pyj}[1, 2, ..., n]$. Osoita, että

$$L_1 | L_2.$$

(F) Fibonaccin luvut (f_n) määritellään asettamalla $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}$. Fibonaccin luvuille pätee (ei saa todistaa)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$