802328A LUKUTEORIAN PERUSTEET (5 op)

Loppukoe 16.1.2012 EI LASKIMIA

1. a) Määrää sellainen $k \in \mathbb{Z}$, $0 \le k \le 12$, että

$$\frac{3}{5} \equiv k \pmod{13}.$$

b) Laske

$$\binom{11/2}{4} \pmod{3}.$$

2. a) Näytä, että Fibonaccin luvuille pätee

$$f_{n+m} = f_{n+1} f_m + f_n f_{m-1}$$

aina, kun $n, m \in \mathbb{N}$. (Voit käyttää alla olevaa tulosta (F).)
b) Johda teleskooppiperiaatteella arvo Fibonaccin lukujen summalle

$$\sum_{k=1}^{m} f_k, \quad m \in \mathbb{Z}^+.$$

3. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_{\ge 2}$. Johda Bernoullin lukujen (katso B) palautuskaava

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_{\ge 2}.$$

4. a) Määrää yhtälön

$$(P) \qquad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}^+, \ a \perp b,$$

kaikki sellaiset ratkaisut (a, b, c), että $c - a = 2$.
b) Osoita, että Neperin luvulle e pätee

$$e\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

(F) Fibonaccin luvut (f_n) määritellään asettamalla $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ aina, kun $k \in \mathbb{Z}$. Fibonaccin luvuille pätee (ei saa todistaa)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(B) Bernoullin luvut määritellään asettamalla

$$\frac{T}{e^T - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} T^n.$$

(e) Neperin luku

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$