

Markkinariskin analyysi

Tenttikysymykset

2012, Joulukuu 17

Tehtävät 1-5 kuuluvat aineopintojen tenttiin ja tehtävät 1-6 kuuluvat syventävien opintojen tenttiin.

1. Selitä mitä tarkoitetaan

- (a) markkinariskillä (market risk),
- (b) luottoriskillä (credit risk),
- (c) toiminnallisella riskillä (operational risk).

2. Olkoon L_{t+1} satunnaismuuttuja, jonka arvo on arvopaperisalkun tappio hetkellä $t+1$. Määrittele $\text{VaR}_\alpha(L_{t+1})$ (value-at-risk) arvopaperisalkulle luottamustasolla $0 < \alpha < 1$

- (a) sanallisesti
- (b) matemaattisella kaavalla.

3. Oletetaan, että reaaliarvoinen satunnaismuuttuja L noudattaa normaalijakaumaa $N(\mu, \sigma^2)$. Osoita, että

$$\text{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha),$$

missä Φ on standardin normaalijakauman kertymäfunktio.

4. (a) Olkoon L satunnaismuuttuja, jonka arvo on arvopaperisalkun tappio hetkellä $t+1$. Määrittele odotettu vaje $\text{ES}_\alpha(L)$ (expected shortfall) luottamustasolla $0 < \alpha < 1$.
- (b) Olkoon L_1, \dots, L_n otos satunnaismuuttujan L jakaumasta. Määrittele empiirisiin kvanttiileihin perustuva estimaattori odotetulle vajeelle (expected shortfall) $\text{ES}_\alpha(L)$.

5. (a) Olkoon $F : \mathbf{R}^d \rightarrow [0, 1]$ kertymäfunktio, jolla on jatkuvat marginaalit $F_i : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, \dots, d$. Määritellään funktio $\tilde{C} : \mathbf{R}^d \rightarrow [0, 1]$ kaavalla

$$\tilde{C}(x_1, \dots, x_d) = F(F_1^{-1}(\Phi(x_1)), \dots, F_d^{-1}(\Phi(x_d))),$$

missä $\Phi : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ on $N(0, 1)$ -jakauman kertymäfunktio. Osoita, että \tilde{C} on kertymäfunktio, jonka marginaalit noudattavat jakaumaa $N(0, 1)$.

- (b) Olkoon $\tilde{C} : \mathbf{R}^d \rightarrow [0, 1]$ kertymäfunktio, jonka marginaalit noudattavat jakaumaa $N(0, 1)$. Olkoot $F_i : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, \dots, d$, jatkuvia kertymäfunktioita. Osoita, että

$$F(x_1, \dots, x_d) = \tilde{C}(\Phi^{-1}(F_1(x_1)), \dots, \Phi^{-1}(F_d(x_d)))$$

on kertymäfunktio, jonka marginaalit ovat F_i , $i = 1, \dots, d$.

HUOM. Tehtävä 6 kuuluu vain syventävien opintojen tenttiin.

6. Tarkastellaan osakeportfolion tappiota

$$L_{t+1} = l_{[t]}(X_{t+1}) = - \sum_{i=1}^d \lambda_i S_{t,i} X_{t+1,i},$$

missä $S_{t,i}$ on osakkeen i hinta hetkellä t , X_{t+1} on satunnaisvektori, jonka elementteinä ovat portfoliossa olevien osakkeiden tuotot $X_{t+1,i} = (S_{t+1,i} - S_{t,i})/S_{t,i}$ ja λ_i on osakkeen i lukumäärä portfoliossa. Oletetaan, että käytettävissä on havainnot X_{t-n+1}, \dots, X_t historiallisista tuotoista. Selitä miten GARCH(1,1) mallin avulla voidaan estimoida ehdollinen vaarassa oleva arvo $\text{VaR}_\alpha(L_{t+1} | \mathcal{F}_t)$ (conditional value-at-risk).