

Matemaattinen ongelmanratkaisu, Tentti 1.2.2010

Voit vastata niin moneen kysymykseen kuin haluat; tentin nimellinen maksimipistemäärä on 30. Aikaa on 240 minuuttia.

Kysymyksistä voi saada ylimääräisiä pisteitä esittämällä vaihtoehtoisia ratkaisuja (maks. 3p/ratkaisu) tai kehittämällä kysymystä edelleen tuoden esille muuta kiinnostavaa *kysymykseen liittyvää*.

Tentissä saa käyttää luentomuistiinpanoja (ja MAOLin taulukkokirjaa, jos on ihan pakko) ja laskimia laitoksen yleisten ohjeiden mukaisesti. Epäselvistä tehtävistä voi kysyä, erityisesti ensimmäisellä 30 min jolloin Peter on paikalla.

Merkkää vastauspaperiisi (etusivun yläosaan) haluatko tuloksesi näkyviin Optimaan.

- (0; 3p) Olkoon x_1, \dots, x_6 reaalityyppisiä lukuja. Onko mahdollista, että jokaisen kahden peräkkäisen termin summa on positiivinen mutta jokaisen kolmen peräkkäisen termin summa on negatiivinen?
- (1; 6p) Purkissa on 5 punaista ja 6 vihreätä kuulaa. Liisa ottaa purkista kaksi kuulaa kerralla, ja laittaa toisen takaisin seuraavien sääntöjen mukaan:
- (a) Jos molemmat kuulat ovat samanvärisiä, hän laittaa toisen niistä takaisin;
 - (b) Jos kuulat ovat erivärisiä, hän laittaa vihreän kuulun takaisin.
- Näin jatketaan, kunnes purkissa on jäljellä vain yksi kuula. Minkä värinen se on?
- (2; 6p) Tason hilapiste on piste jonka molemmat koordinaatit ovat kokonaislukuja. Viiden tason hilapisteen joukko on annettu. Osoita, että joukosta voidaan valita kaksi pistettä joiden yhdistysjanan keskipiste on myös hilapiste.
- (6; 8p) Etsi kaikki reaaliratkaisut yhtälölle $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$. Tässä $[x]$ on pienin kokonaisluku, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x .
- (3; 8p) Kaksi pelaajaa pelaa peliä nimeltä Viisitoista. Pelin kulku on seuraava. Alussa pöydällä on yhdeksän korttia joissa on numeroitu $1, \dots, 9$. Pelaajat ottavat vuorotellen kortin pöydältä käteensä. Pelaaja voittaa heti kun hänen kädestä löytyy kolme korttia joiden numeroiden summa on 15 (hänellä voi tässä vaiheessa olla kädessään enemmän kuin kolme korttia, mutta summaan pitää käyttää täsmälleen kolmea). Mikäli pöydällä ei ole kortteja jäljellä eikä kumpikaan pelaaja ole voittanut, on peli päättynyt tapapeliin.
- Onko jommallakummalla pelaajalla voittostrategia? Jos on, niin kummalla? Perustele.
- (4; 8p) Mikä on viimeinen numero luvun $2^{3^{4^5}}$ desimaaliesityksessä?
- (6; 12p) Olkoon $x, y, z \geq 0$ reaalityyppisiä lukuja joille $x+y+z = 1$. Osoita, että $x^2y+y^2z+z^2x \leq \frac{4}{27}$. Voiko tässä päteä yhtä suuruus jollain x, y, z ?