Matemaattinen logiikka

2. välikoe, 6.5.2005

Vastaa neljään tehtävään seuraavista
ja muista perustella kaikki päättelysi.

1. Osoita, että jokaisella ristiriidattomalla ekt:lla on ristiriidaton täydellinen laajennus.

2. Olkoon $\mathcal{K}$ ekt ja $\mathcal{A}$ sen suljettu ilmaisu, joka on tosi $\mathcal{K}$:n kaikissa malleissa. Osoita, että $\mathcal{A}$ on $\mathcal{K}$:n teoreema.

3. Olkoon $\mathcal{K}$ ekt. Osoita, että seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät:
   (i) $\mathcal{K}$ on täydellinen;
   (ii) $\mathcal{K} + \{\mathcal{A}\}$ on ristiriitainen aina kun $\mathcal{A}$ on $\mathcal{K}$:n suljettu ilmaisu, joka ei ole $\mathcal{K}$:n teoreema.

4. Olkoon $\mathcal{K}$ ekt, jonka ominaisaksiomijoukon jokaisella äärellisellä osajoukolla on malli. Osoita, että $\mathcal{K}$:lla on malli.

5. Luettele formaalin lukuteorian N aksiomikaavat.

6. Määrittele Gödel-teorian kaksipaikkainen predikaatti $A(\cdot,\cdot)$ ts. kerro, mille luvuille m, n $A(m,n)$ on tosi. Olkoon $\mathcal{A}(x,y)$ sitä esittävä ilmaisu formaalissa lukuteoriassa N ja olkoon m ilmaisun $\forall y \sim \mathcal{A}(x,y)$ Gödel-luku. Osoita, että jos N on ristiriidaton, niin ilmaisu $\forall y \sim \mathcal{A}(\overline{m},y)$ ei ole N:n teoreema.