

## Matemaattinen logiikka

### Kesätentti 20.6.2005

1. Olkoon  $\mathcal{A}$  propositio  $(\sim A \wedge \sim B) \vee (B \wedge \sim C)$ . Konstruoi sellaiset propositiot  $\mathcal{B}_i$ , että  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ja
  - $\mathcal{B}_1$ :ssä esiintyvät konnektiivit ovat  $\sim$  ja  $\vee$ ,
  - $\mathcal{B}_2$ :ssa esiintyvät konnektiivit ovat  $\sim$  ja  $\wedge$ ,
  - $\mathcal{B}_3$ :ssa esiintyvät konnektiivit ovat  $\sim$  ja  $\rightarrow$ .
2. Esitä (ilman todistuksia) predikaattikalkyylin Specialisoimissääntö, Eksistenssisääntö, Yleistyssääntö ja Sääntö C.
3. Määrää ilmaisulle  $\forall x G(x) \rightarrow \forall y (H(x, y) \rightarrow \sim \exists z K(y, z))$  jokin prenex-normaalimuoto, kun  $x, y, z$  ovat eri muuttujia ja  $G, H, K$  ovat predikaattisymboleja. (Luettele käyttämäsi perusekvivalenssit.)
4. Osoita, että predikaattikalkyylin jokainen validi ilmaisu on sen teoreema.
5. Määrittele Gödel-teorian kaksipaikkainen predikaatti  $A(\cdot, \cdot)$  ts. kerro, mille luvuille  $m, n$   $A(m, n)$  on tosi. Olkoon  $\mathcal{A}(x, y)$  sitä esittävä ilmaisu formaalissa lukuteoriassa  $N$  ja olkoon  $m$  ilmaisun  $\forall y \sim \mathcal{A}(x, y)$  Gödel-luku. Osoita, että jos  $N$  on ristiriidaton, niin ilmaisu  $\forall y \sim \mathcal{A}(\overline{m}, y)$  ei ole  $N$ :n teoreema.

**Muista perustella tekemäsi päättelyt.**