Matemaattinen logiikka

Loppukoe 16.5.2005

VASTAA VIITEEN TEHTÄVÄÄN SEURAAVISTA JA MUISTA PERUSTELLA KAIKKI PÄÄTTELYSI

1. Määrää sellainen propositio $\mathcal{A}$, jossa kukin propositiokirjaimista A, B, C esiintyy tarkalleen yhden kerran ja joka generoi seuraavan totuusfunktion f :

$$f(1,1,0) = f(1,0,0) = f(0,0,0) = 0; f(t_1, t_2, t_3) = 1 \text{ muutoin.}$$

2. Osoita, että muotoa $\forall x(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) \to (\exists x\mathcal{A} \to \mathcal{B})$ olevat $\mathcal{L}_{pred}$:n ilmaisut ovat sen teoreemoja, jos x ei ole vapaa $\mathcal{B}$:ssä. Esitä ja todista tämän teoreeman avulla Sääntö C.

3. Esitä formaalit määritelmät käsitteille "tulkinta", "tulkinnan piste toteuttaa ilmaisun" ja "ilmaisu on tosi tulkinnassa".

4. Osoita, että seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät jokaiselle ekt:lle $\mathcal{K}$:

   (i) $\mathcal{K}$ on täydellinen;

   (ii) Aina kun $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ on $\mathcal{K}$:n teoreema sen suljetuille ilmaisuille $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$, niin $\mathcal{A}$ tai $\mathcal{B}$ on $\mathcal{K}$:n teoreema.

5. Olkoon $\mathcal{K}$ ekt ja $\mathcal{B}$ sen suljettu ilmaisu. Osoita, että jos $\mathcal{B}$ on $\mathcal{K}$:n jokaisen ristiriidattoman täydellisen laajennuksen teoreema, niin se on myös $\mathcal{K}$:n teoreema.

6. Olkoon $\mathcal{K}$ sellainen ekty, että sillä on jokaista kokonaislukua $n > 0$ kohti normaali malli $\mathcal{I}_n(\mathcal{D}_n)$, missä $\text{card}\mathcal{D}_n \geq n$. Osoita, että $\mathcal{K}$:lla on numeroituvasti ääretön normaali malli.