800653S Matriisiteoria

Loppukoe 26.11.2012, M. Rinta-aho

1. Millä kompleksisten vakioiden a, $b \in \mathbb{C}$ arvoilla matriisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\mathrm{i} & a \\ \mathrm{i} & 2 & b \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   on diagonalisoituva?

2. Olkoot A, $B \in \mathbb{C}_{n\times n}$. Osoita:

   (a) Jos A ja B ovat similaariset sekä A on säännöllinen, niin myös B on säännöllinen ja lisäksi A^{-1} ja B^{-1} ovat similaariset.

   (b) Aina A ja A^{T} ovat similaariset.

3. Neliömatriisin A karakteristinen polynomi on $c_A(\lambda) = (\lambda+1)^6(\lambda+2)^4$, minimaalipolynomi on $m_A(\lambda) = (\lambda+1)^3(\lambda+2)^2$ ja eräs matriisin $\lambda I - A$ alkeistekijöistä on $(\lambda+1)^2$. Määrää matriisin $\lambda I - A$ invariantit polynomit ja alkeistekijät sekä matriisin A mahdolliset Jordan-muodot.

4. (a) Määrittele, milloin funktio $f(\lambda)$ on määritelty matriisin $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ spektrissä. Muista merkintöjen selitykset!

   (b) Määrää matriisi $f(A)$, kun matriisin $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ minimaalipolynomi on $m_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-3)$.

5. Osoita, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on positiivisesti definiitti jos ja vain jos A on hermiittinen ja kaikki sen ominaisarvot ovat aidosti positiivisia.