

# 800653S Matriisiteoria

Koe 17.10.2011 (Juho Rosqvist)

Kokeessa sallittuja apuvälineitä ovat ainoastaan kirjoitusvälineet.

Koeaika on 240 minuuttia.

Vastaa kaikkiin tehtäviin. Muista perustella päättelysi.

1. Voidaanko matriisi

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

(6 p)

esittää muodossa  $A = LU$ , missä  $U$  on yläkolmiomatriisi ja  $L$  on sellainen alakolmiomatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat kaikki ykkösiä? Jos tällainen esitys on olemassa, onko se yksikäsitteinen?

2. Määrää matriisi  $e^A$  kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(6 p)

3. Olkoon  $n \geq 2$ ,  $B \in \mathbb{C}^n$ ,  $\|B\| = 1$  ja  $A = I - 2BB^*$ , missä  $I$  on  $n \times n$ -yksikkömatriisi.

(a) Osoita, että  $A$  on hermiittinen ja unitaarinen.

(3 p)

(b) Osoita, että matriisin  $A$  erisuuret ominaisarvot ovat  $-1$  ja  $1$ .

(3 p)

4. Olkoon  $A^+$  matriisin  $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$  Moore–Penrose-inverssi sekä  $B \in \mathbb{C}^m$ . Osoita, että kullakin yhtälöistä

$$(1) \quad AX = AA^+B, \quad (2) \quad A^+AX = A^+B, \quad (3) \quad A^*AX = A^*B$$

on täsmälleen samat ratkaisut, ts. yhtälöt ovat pareittain yhtäpitävät.

5. Olkoon matriisi  $A = CBC^{-1}$ , missä

(6 p)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 & 2 & i & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & 2 & i & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -2i & 2i & -1 & 1 \\ i & 0 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 2i & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & i & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Määrää matriisin  $A$  minimaalipolynomi ja ominaisarvot. Etsi vielä jokin matriisin  $A$  itseisarvoltaan pienimpään ominaisarvoon liittyvä nollasta eriävä ominaisvektori.