**800653S Matriisiteoria**
**Loppukoe 10.1.2011**

1. Olkoon $x_0 \in \mathbb{C}^n$ yksikkövektori, ts. $\|x_0\| = 1$. Osoita, että matriisi $A = I - 2x_0x_0^* \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on hermiittinen sekä unitaarinen. Osoita vektorin $x_0 \in \mathbb{C}^n$ avulla, että $\lambda = -1$ on sen eräs ominaisarvo.

2. Osoita, että matriisin $A \in K_{n\times n}$ jokaisen ominaisarvon (algebrallinen) kertaluku on suurempi tai yhtäsuuri ($\geq$) kuin sen geometrinen kertaluku.

3. Neliömatriisin $A$ karakteristinen polynomi on $c_A(\lambda) = (\lambda-1)^7(\lambda+2)^4$, minimaalipolynomi on $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^4(\lambda+2)^2$ ja eräs matriisin $\lambda I - A$ alkeistekijöistä on $(\lambda-1)^2$. Määrää matriisin $\lambda I - A$ invariantit polynomit ja alkeistekijät sekä matriisin $A$ mahdolliset Jordan-muodot.

4. (a) Määrittele milloin funktio $f(\lambda)$ on määritelty matriisin $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ spektrissä.

   (b) Määrää matriisi $f(A)$ kun

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 10 & 13 \\ 3 & -7 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{3\times 3}$$

   kun $f$ on matriisin $A$ spektrissä määritelty funktio.

**Valitse *toinen* seuraavista:**

5. Tiedetään, että yläkolmiomatriisi on normaali jos ja vain jos se on diagonaalimatriisi. Osoita tämän avulla, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on normaali jos ja vain jos se on unitaarisesti similaarinen jonkin diagonaalimatriisin kanssa.

5'. Osoita, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on positiivisesti definiitti jos ja vain jos $A$ on hermiittinen ja kaikki sen ominaisarvot ovat aidosti positiivisia. Osoita lisäksi, että jos $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on positiivisesti semidefiniitti, niin sen aidosti positiivisten ominaisarvojen lukumäärä on $r(A)$.

**Muista perustelut!**