800653S Matriisiteoria
Loppukoe 14.5.2007

1. Osoita, että matriisi
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{3\times 3}$$
on diagonalisoituva. Esitä matriisi A muodossa $A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3$, missä $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ ovat matriisin A ominaisarvoja ja $G_1, G_2, G_3 \in \mathbb{C}_{3\times 3}$ ovat projektioita.

2. Tiedetään, että yläkolmiomatriisi on normaali jos ja vain jos se on diagonaalimatriisi. Osoita tämän avulla, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on normaali jos ja vain jos se on unitaarisesti similaarinen jonkin diagonaalimatriisin kanssa.

3. Osoita, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on positiivisesti definiitti jos ja vain jos A on hermiittinen ja kaikki sen ominaisarvot ovat aidosti positiivisia. Osoita lisäksi, että jos $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on positiivisesti semidefiniitti, niin sen aidosti positiivisten ominaisarvojen lukumäärä on $r(A)$.

4. Määrää matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
Jordan-hajotelma sekä ensimmäinen ja toinen luonnollinen normaalimuoto. Onko matriisi A diagonalisoituva? (Muista perustelut!)

5. (a) Määrittele milloin funktio $f(\lambda)$ on määritelty matriisin $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ spektrissä.

   (b) Määrää matriisi $f(I)$ kun $f(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda}$ ja
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{4\times 4}.$$

Muista perustelut!