

800653S Matriisiteoria
Kesätentti 16.7.2007

1. Esitä matriisin $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ LU -hajotelma (ilman todistusta). Määrä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -3 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{3 \times 3}$$

LU -hajotelma (eli esitä matriisi A muodossa $A = LU$, missä matriisit L ja U ovat vaadittua muotoa).

2. Osoita, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ on unitaarinen jos ja vain jos $(Ax|Ax) = (x|x)$ kaikilla $x \in \mathbb{C}^n$.
3. Määrä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jordan-hajotelma sekä ensimmäinen ja toinen luonnollinen normaalimuoto. Onko matriisi A diagonalisoituva? (Muista perustelut!)

4. (a) Määrittele milloin funktio $f(\lambda)$ on määritelty matriisin $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ spektrissä.
- (b) Määrä matriisi $f(I)$ kun $f(\lambda) = e^\lambda$ ja

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{4 \times 4}.$$

Valitse toinen seuraavista:

5. Tiedetään, että yläkolmiomatriisi on normaali jos ja vain jos se on diagonaalimatriisi. Osoita tämän avulla, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ on normaali jos ja vain jos se on unitaarisesti similaarinen jonkin diagonaalimatriisin kanssa.
- 5'. Osoita, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ on positiivisesti definiitti jos ja vain jos A on hermiittinen ja kaikki sen ominaisarvot ovat aidosti positiivisia. Osoita lisäksi, että jos $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ on positiivisesti semidefiniitti, niin sen aidosti positiivisten ominaisarvojen lukumäärä on $r(A)$.

Muista perustelut!