800653S Matriisiteoria
Loppukoe 18.6.2007

1. Osoita, että matriisi
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{3\times 3}$$
on diagonalisoituva. Esitä matriisi A muodossa $A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3$, missä $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ ovat matriisin A ominaisarvoja ja $G_1, G_2, G_3 \in \mathbb{C}_{3\times 3}$ ovat projektioita.

2. Osoita, että matriisin $A \in K_{n\times n}$ jokaisen ominaisarvon (algebrallinen) kertaluku on suurempi tai yhtäsuuri ($\geq$) kuin sen geometrinen kertaluku.

3. Osoita, että jokainen matriisi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on unitaarisesti similaarinen jonkin yläkolmiomatriisin kanssa.

4. Määrää matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{4\times 4}$$
Jordan-hajotelma sekä ensimmäinen ja toinen luonnollinen normaalimuoto. Onko matriisi A diagonalisoituva? (Muista perustelut!)

5. (a) Märittele milloin funktio $f(\lambda)$ on määritelty matriisin $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ spektrissä.

   (b) Määrää matriisi $f(I)$ kun $f(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda}$ ja
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{4\times 4}.$$

Muista perustelut!