

800653S Matriisiteoria
Loppukoe 25.2.2008

1. Määrää matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{3 \times 3}$$

oikeat ja vasemmat ominaisvektorit. Onko matriisi A diagonalisoituva? Esitä matriisi A muodossa $A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3$, missä $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ ovat matriisin A ominaisarvoja ja $G_1, G_2, G_3 \in \mathbb{C}_{3 \times 3}$ ovat projektioita.

2. Olkoon $x_0 \in \mathbb{C}^n$ yksikkövektori, ts. $\|x_0\| = 1$. Osoita, että matriisi $A = I - 2x_0x_0^* \in \mathbb{C}_{n \times n}$ on hermiittinen sekä unitaarinen. Osoita vektorin $x_0 \in \mathbb{C}^n$ avulla, että $\lambda = -1$ on sen eräs ominaisarvo.
3. Neliömatriisin A karakteristinen polynomi on $c_A(\lambda) = (\lambda - 1)^7(\lambda + 2)^4$, minimaalipolynomi on $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^4(\lambda + 2)^2$ ja eräs matriisin $\lambda I - A$ alkeistekijöistä on $(\lambda - 1)^2$. Määrää matriisin $\lambda I - A$ invariantit polynomit ja alkeistekijät sekä matriisin A mahdolliset Jordan-muodot.
4. (a) Määrittele milloin funktio $f(\lambda)$ on määritelty matriisin $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ spektrissä.
(b) Määrää matriisi $f(A)$ kun

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 10 & 13 \\ 3 & -7 & -9 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{3 \times 3}.$$

Valitse toinen seuraavista:

5. Tiedetään, että yläkolmiomatriisi on normaali jos ja vain jos se on diagonaalimatriisi. Osoita tämän avulla, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ on normaali jos ja vain jos se on unitaarisesti similaarinen jonkin diagonaalimatriisin kanssa.
- 5'. Osoita, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ on positiivisesti definiitti jos ja vain jos A on hermiittinen ja kaikki sen ominaisarvot ovat aidosti positiivisia. Osoita lisäksi, että jos $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ on positiivisesti semidefiniitti, niin sen aidosti positiivisten ominaisarvojen lukumäärä on $r(A)$.

Muista perustelut!