

800653S Matriisiteoria  
Loppukoe 26.5.2008

1. (a) Esitä yleisessä muodossa matriisin  $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$   $LU$ -hajotelma (ilman todistusta). Milloin hajotelma on olemassa? (3p)

- (b) Määrää matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{3 \times 3}$$

$LU$ -hajotelma.

(3p)

2. Määrää matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jordan-muoto sekä ensimmäinen ja toinen luonnollinen normaalimuoto. Onko matriisi  $A$  diagonalisoituva? (Muista perustelut!)

3. (a) Määrittele milloin funktio  $f(\lambda)$  on määritelty matriisin  $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$  spektrissä. (Muista merkintöjen selitykset!) (1p)
- (b) Määrittele matriisifunktio  $f(A)$  kun  $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$  ja funktio  $f$  on määritelty matriisin  $A$  spektrissä. (1p)
- (c) Määrää matriisi  $f(A)$  kun matriisin  $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$  minimaalipolynomi on  $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$ . (4p)
4. Osoita, että matriisi  $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$  on positiivisesti definiitti jos ja vain jos  $A$  on hermiittinen ja kaikki sen ominaisarvot ovat aidosti positiivisia.

Valitse *toinen* seuraavista:

5. Tiedetään, että yläkolmiomatriisi on normaali jos ja vain jos se on diagonaalimatriisi. Osoita tämän avulla, että matriisi  $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$  on normaali jos ja vain jos se on unitaarisesti similaarinen jonkin diagonaalimatriisin kanssa.
- 5' Matriisi  $H \in \mathbb{C}_{n \times n}$  on positiivisesti definiitti jos ja vain jos on olemassa sellainen positiivisesti definiitti matriisi  $H_0 \in \mathbb{C}_{n \times n}$ , että  $H_0^2 = H$ .

**Muista perustelut!**