Matriisiteoria
2. välikoe 3.5.2007

Vastaa vain neljään (4) tehtävään.

1. Määrää matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{3\times 2}$$
singulaariarvohajotelma sekä Moore-Penrose -inverssi A^+.

2. Osoita, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on positiivisesti definiitti jos ja vain jos A on hermiittinen ja kaikki sen ominaisavot ovat aidosti positiivisia.

3. Olkoon $A \in K_{n\times n}$.
   (a) Määrittele matriisin A minimaalipolynomi $m_A(\lambda)$.
   (b) Osoita, että jos $p(A) = 0$ jollakin K-kertoimisella polynomilla $p(\lambda)$, niin $p(\lambda)$ on jaollinen minimaalipolynomilla $m_A(\lambda)$.
   (c) Osoita, että minimaalipolynomi $m_A(\lambda)$ on yksikäsitteinen.

4. Muodosta matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{4\times 4}$$
I ja II luonnollinen normaalimuoto sekä Jordan-muoto.

5. (a) Määrittele milloin funktio $f(\lambda)$ on määritelty matriisin $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ spektrissä.
   (b) Määrää $f(A)$ kun $f(\lambda) = \mathrm{e}^\lambda$ ja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{3\times 3}.$$

Muista perustelut!