MATRIISITEORIA

1. välikoe 25.10.2004

1. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} B_1 & C \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$
kvasiyläkolmiomatriisi. Esitä A muodossa $A = A_2 A_1$, missä
$$A_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$
Määrää tämän avulla $\det A$.

2. Olkoon $A = I - cBB^*$, missä $B \in \mathbb{C}^n$, $B \neq 0$ ja $c = 2/B^*B$. Osoita, että A on hermiittinen ja unitaarinen. Osoita lisäksi, että -1 on A:n ominaisarvo ja B on sitä vastaava eräs ominaisvektori.

3. Olkoon $A \in \mathbb{R}_{n\times n}$ symmetrinen matriisi sekä r sen pienin ja R sen suurin ominaisarvo. Osoita, että
$$r \leq X^T A X \leq R \quad \text{aina kun } X \in \mathbb{R}^n \quad \text{ja } |X| = 1.$$

4. Osoita, että jokainen neliömatriisi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on muotoa $A = HU$, missä U on unitaarinen ja H on positiivisesti semidefiniitti.