800653S Matriisiteoria
2. välikoe 9.12.2004

VASTAA NELJÄÄN TEHTÄVÄÄN SEURAAVISTA

1. Minkä yhtälöryhmän yksikäsitteisenä ratkaisuna matriisin $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ Moore-Penrose-inverssi A^+ saadaan (ei perusteluja)? Osoita, että vektori $X_0 = A^+B$, missä $B \in \mathbb{C}^m$, täyttää ehdon

$$|AX - B| \geq |AX_0 - B| \text{ aina kun } X \in \mathbb{C}^n.$$

2. Määrittele λ-matriisin invariantit polynomit. Osoita, että λ-matriisilla $\lambda I - A$, missä $A \in K_{n\times n}$, on n invarianttia polynomia $i_1(\lambda), \ldots, i_n(\lambda)$ ja että $c_A(\lambda) = i_1(\lambda)\; i_2(\lambda) \cdots i_n(\lambda)$ sekä $m_A(\lambda) = i_n(\lambda)$.

3. Määrää matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$
ensimmäinen ja toinen luonnollinen normaalimuoto sekä Jordan - normaalimuoto.

4. Olkoot a ja b vakioita, missä $a \neq 0$. Millä ehdoilla funktio f on määritelty matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ 3 & b & -2 \end{bmatrix}$$
spektrissä ja mikä on tällöin $f(A)$:n spektraalihajotelma?

5. Olkoon $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
   (i) Jono $A, A^2, A^3, \ldots$ suppenee ja sen raja-arvo on nollamatriisi.
   (ii) A:n jokaisen ominaisarvon itseisarvo on < 1.