

Matriisiteoria

Loppukoe 10.1.2005 (prof. P. Turakainen)

1. Tiedetään, että yläkolmiomatriisi on normaali jos ja vain jos se on diagonaalimatriisi. Osoita tämän avulla, että matriisi $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ on normaali jos ja vain jos se on unitaarisesti similaarinen jonkin diagonaalimatriisin kanssa.
2. Esitä matriisin $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ singulaariarvohajotelma (ei todistusta) ja osoita sen avulla, että matriisiyhtälöllä $X^2 = A^*A$ on positiivisesti semidefiniitti ratkaisu.

3. Määrää matriisin

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ b & c & -2 \end{bmatrix}$$

Jordan-normaalimuoto kaikilla vakioiden $a, b, c \in \mathbb{C}$ arvoilla.

4. Olkoon f matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

spektrissä määritelty funktio. Määrää A :n minimaalipolynomi ja matriisin $f(A)$ spektraalihajotelma.

5. Olkoon $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ sellainen matriisi, että sen kaikki ominaisarvot toteuttavat ehdon $|\lambda| < 1$. Osoita, että jono I, A, A^2, A^3, \dots suppenee kohti nollamatriisia ja tämän avulla, että sarja $I + A + A^2 + A^3 + \dots$ suppenee kohti matriisia $(I - A)^{-1}$. Miksi ko. käänteismatriisi on olemassa?