800653S Matriisiteoria
Loppukoe 18.12.2006
(Prof. Turakaisen luentojen perusteella)

1. Osoita, että jokainen matriisi $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on muotoa $A = HU$, missä $U \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on unitaarinen ja $H \in \mathbb{C}_{n\times n}$ on positiivisesti semidefiniitti.

2. Olkoon $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$. Osoita, että matriisiyhtälöryhmällä

$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ (AX)^* = AX \\ (XA)^* = XA \end{cases}$$

on täsmälleen yksi ratkaisu $X \in \mathbb{C}_{n\times m}$.

3. (a) Määrittele matriisin $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ minimaalipolynomi $m_A(\lambda)$.
   (b) Osoita, että jos $p(\lambda)$ on $\mathbb{C}$-kertoiminen polynomi ja $p(A) = 0$, niin $p(\lambda)$ on tasan jaollinen minimaalipolynomilla $m_A(\lambda)$.
   (c) Osoita, että minimaalipolynomi $m_A(\lambda)$ on yksikäsitteisesti määrätty.

4. Määrää λ-matriisin $\lambda I - A$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

invariantit polynomit, Jordan-normaalimuoto ja ensimmäinen luonnollinen normaalimuoto.

5. Olkoon funktio f matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

spektrissä määritelty funktio. Määrää matriisin $f(A)$ spektraalihajotelma.

Muista perustella kaikki päättelysi!