Matriisiteoria

Loppukoe 23.5.2005

Vastaa viiteen tehtävään seuraavista

1. Osoita, että jos matriisilla $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ on n kpl lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita, niin se on diagonalisoituva.

2. Olkoon $B \in \mathbb{C}^n$ vektori, jolle $|B| = 1$. Osoita, että matriisi $I - 2BB^*$ on hermiittinen ja unitaarinen ja että -1 on sen eräs ominaisarvo.

3. Osoita, että matriisiyhtälöryhmällä

$$AXA = A, XAX = X, (AX)^* = AX, (XA)^* = XA,$$

missä $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$, on korkeintaan yksi ratkaisu $X \in \mathbb{C}_{n \times m}$.

4. Määrää λ-matriisin $\lambda I - A$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

invariantit polynomit sekä matriisin A ensimmäinen luonnollinen normaalimuoto ja Jordan-normaalimuoto.

5. Määrää matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & 10 & 13 \\ 3 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

minimaalipolynomi ja $f(A)$, kun f on A:n spektrissä määritelty funktio.

6. Olkoon $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$. Esitä (ilman todistuksia) A:lle kuusi tulohajotelmaa kahden tai kolmen erikoistyyppisen matriisin tulona (pelkät hajotelmien nimet eivät riitä) ja niiden olemassaoloa koskevat ehdot. (Myös tapaus $m = n$ lasketaan mukaan.)