Matriisiteoria

Loppukoe   25.10.2004

1. Osoita, että matriisin $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ jokaisen ominaisarvon kertaluku on $\geq$ sen geometrinen kertaluku.

2. Olkoon $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ matriisi, jolle $A^* = p(A)$, missä $p(\lambda)$ on polynomi. Osoita, että A on normaali ja että $p(\lambda_j) = \overline{\lambda_j}$ A:n jokaiselle ominaisarvolle λ_j.

3. Olkoot a, b ja c sellaisia vakioita, että $a \neq b$. Määrää Jordan-normaalimuoto matriisille

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & 2 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Olkoon $f(\lambda)$ matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

spektrissä määritelty funktio. Määrää $f(A)$:n spektraalihajotelma.

VALITSE VAIN TOINEN TEHTÄVISTÄ 5 JA 5'.

5. Olkoon $A \in \mathbb{C}_{m\times n}, B \in \mathbb{C}^m$ ja olkoon A^+ matriisin A Moore-Penrose-inverssi. Osoita, että

$$|AA^+B - B| = \min_{X\in\mathbb{C}^n} |AX - B|$$

5'. Olkoon $A(\lambda)$ kokoa $n \times n$ oleva λ-matriisi, jonka alkiot ovat K-kertoimisia polynomeja, missä K on kunta. Olkoon $B \in K_{n\times n}$. Osoita, että $A(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda I - B) + C$ jollekin λ-matriisille $Q(\lambda)$ ja jollekin matriisille $C \in K_{n\times n}$. Miten C saadaan $A(\lambda)$:sta?