

## Matriisiteoria

Loppukoe 28.2.2005

1. Määrää matriisille

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

jokin LU-hajotelma.

2. Olkoon  $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$  muotoa

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oleva matriisi, missä  $B \in \mathbb{C}_{k \times k}$  ( $1 \leq k < n$ ). Osoita, että  $A$  on normaali jos ja vain jos  $B$  on normaali ja  $C = 0$ .

3. Olkoon  $A^+$  matriisin  $A \in \mathbb{C}_{m \times n}$  Moore-Penrose-inverssi ja  $B \in \mathbb{C}^m$ . Osoita, että matriisiyhtälöt

$$AX = AA^+B, A^+AX = A^+B, A^*AX = A^*B$$

ovat pareittain yhtäpitävät (ts. niillä on täsmälleen samat ratkaisut).

4. Määrää  $\lambda$ -matriisin  $\lambda I - A$  invariantit polynomit ja alkeistekijät sekä  $A$ :n Jordan-normaalimuoto, kun

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 & -14 \\ 1 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Olkoon  $f$  matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

spektrissä määritelty funktio. Määrää matriisin  $f(A)$  spektraalihajotelma.