

Metriten topologia

Tentti 18.6.2012

Koeaika on neljä tuntia.

1. Määritä tarkasti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$A = \left\{ -\frac{n-2}{2n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

2. Määritä tarkasti perustellen joukon

$$A = \{(2^{-n}, 2^{-n}) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}^2$$

sulkeuma.

3. a) Määrittele joukon reuna.

b) Oletetaan, että $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on suppeneva jono joukossa \mathbb{R}^m . Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että jono $(ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee.

4. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ kuvaus. Oletetaan, että $f^{-1}(U)$ on avoin kaikilla avoimilla $U \subset \mathbb{R}^k$. Osoita, että kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy sellainen $\delta > 0$, että $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.

5. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ jatkuva kuvaus. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^n$ on yhtenäinen. Osoita, että $f(A)$ on yhtenäinen. Onko $f^{-1}(B)$ yhtenäinen, jos $B \subset \mathbb{R}^k$ on yhtenäinen?