

## Metrinen topologia

Tentti 2.4.2012

Koeaika on neljä tuntia.

1. Määritä tarkasti perustellen  $\sup A$  ja  $\inf A$ , kun

$$A = \left\{ \frac{2n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

2. Määritä tarkasti perustellen joukon

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ ja } y < \sqrt{x}\}$$

reuna.

3. a) Määrittele kasautumispiste.

b) Oletetaan, että  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ja  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ovat suppenevia jonoja joukossa  $\mathbb{R}^m$ . Osoita, että jono  $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suppenee.

4. Osoita, että kuvaus  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 \text{ kaikilla } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

on jatkuva.

5. Oletetaan, että  $A \subset \mathbb{R}^m$  on kompakti ja  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$  on jatkuva. Osoita, että  $f(A)$  on kompakti. Onko  $f^{-1}(B)$  kompakti, jos  $B \subset \mathbb{R}^k$  on kompakti?