Metrinen topologia

Tentti 12.3.2012

Koeaika on neljä tuntia.

1. Määritä tarkasti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$, kun
$$A = \{(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

2. Määritä tarkasti perustellen joukon $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| > x^2\}$ reuna.

3. a) Määrittele Cauchy-jono.
b) Oletetaan, että $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on suppeneva jono joukossa $\mathbb{R}^m$. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että jono $(ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee.

4. Olkoon a joukon $A \subset \mathbb{R}^m$ kasautumispiste ja olkoon $f : A \to \mathbb{R}^k$ kuvaus. Osoita, että kuvauksella f on raja-arvo $b \in \mathbb{R}^k$ pisteessä a, jos ja vain jos $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$ jokaisella joukon $A \setminus \{a\}$ jonolla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jolle $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

5. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{R}^m$ on kompakti, $B \subset \mathbb{R}^k$ ja $f : A \to B$ on jatkuva bijektio. Osoita, että $f^{-1} : B \to A$ on jatkuva. Päteekö väite, jos A ei ole kompakti?