Moderni reaalianalyysi 8.8.2011

1.

(a) Määrittele $L^p(A)$ avaruus, kun $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko ja $0 < p \leq \infty$. Määrittele myös avaruuden $L^\infty(A)$ normi.

(b) Määrittele $L^p_{loc}(A)$, kun $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin joukko ja $1 \leq p \leq \infty$.

(c) Määrittele $C_0(A)$, kun $A \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko.

(d) Selosta miten Cantorin funktio määritellään (pääkohdat).

(e) Selosta pääkohdat miten todistetaan, että avaruus $C_0(\mathbf{R^n})$ on tiheä avaruudessa $L^p(\mathbf{R^n})$.

(f) Todista Jensenin epäyhtälö.

2. Oletetaan, että $\int_{\mathbf{R}^n} |f|^p \, dm < \infty$ jollain $0 < p < \infty$. Todista, että

$$\lim_{p \to 0} \int_{\mathbf{R}^n} |f|^p \, dm = m(\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \neq 0\}).$$

3. Olkoon $f(x) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, $f(x) = |x|^{-n}$. Todista, että $f \in L^p(B(0,1))$ jos ja vain jos $0 < p < 1$, missä $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$.

4. Oletetaan, että $f \in$ heikko $L^p(\mathbf{R^n})$ ja

$$m(\{x \in \mathbf{R^n} : f(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Näytä, että

$$\int_{\mathbf{R^n}} |f|^q \, dm < \infty$$

kaikilla q, $0 < q < p$.

5. Olkoon, $f \in L^p(\mathbf{R^n})$ ja $g \in L^{p'}(\mathbf{R^n})$, missä $p > 1$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

(a) Osoita, että $||f * g||_\infty \leq ||f||_p \, ||g||_{p'}$.

(b) Osoita, että on olemassa jono $h_i \in C_0^\infty(\mathbf{R^n})$, $i = 1, 2, \ldots.$ siten, että

$$||f * g - h_i||_\infty \to 0, \text{ kun } i \to \infty.$$

(c) Osoita, että $\lim_{|x| \to \infty} (f * g)(x) = 0$.

(d) Anna esimerkki funktioista $f \in L^1(\mathbf{R^n})$ ja $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R^n})$ siten, että

$$\lim_{|x| \to \infty} (f * g)(x) \neq 0.$$