Moniulotteinen analyysi 800322A

Välikoe 2/2 13.12.2012

Kuulustelija: Pekka Salmi

1. (a) Olkoot $f(x, y) = (x^2, xy, y)$ ja $g(u, v) = (u + v, 1)$. Laske funktioiden f ja g Jacobin matriisit $J_{f,(x,y)}$ ja $J_{g,(u,v)}$. Laske yhdistetyn funktion $f \circ g$ Jacobin matriisi $J_{f\circ g,(1,1)}$ pisteessä $(1, 1)$.

   (b) Olkoot $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differentioituvia funktioita. Esitä funktion $f \circ g$ osittaisderivaatta $\partial_1(f \circ g)(a)$ (missä $a \in \mathbb{R}^2$) f:n ja g:n koordinaattifunktioiden osittaisderivaattojen avulla.

2. Määrää funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kriittiset pisteet ja niiden laatu, kun $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^2$. Tutki onko funktiolla f globaaleja ääriarvoja.

3. (a) Laske funktion $f(x, y) = (xy + 2, x^2 + y^2)$ polkuintegraali

$$\int_\alpha f \cdot d\alpha$$

   kun $\alpha(t) = (2t, t^2)$, $0 \le t \le 1$.

   (b) Oletetaan, että $f\colon \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ (missä D on avoin) on C^1-funktio ja että $\alpha\colon [a, b] \to D$ on C^1-polku D:ssä pisteestä $p = \alpha(a)$ pisteeseen $q = \alpha(b)$. Osoita, että

$$\int_\alpha \nabla f \cdot d\alpha = f(q) - f(p).$$

4. (a) Laske integraali

$$\iint_R x^2 + y^2 \, dx \, dy,$$

   kun $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

   (b) Laske integraali

$$\iint_S x^2y^2 \, dx \, dy,$$

   kun

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$$

   ja $a > 0$, $b > 0$.