Numeerinen analyysi

Loppukoe, 24.4.2006

1. (a) Millä parametrin $a \in \mathbb{R}$ arvoilla matriisi

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 2a \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

   on (i) aidosti diagonaalisesti dominoiva (ii) irredusoituva?

   (b) Olkoon x sellainen vektori, että $x = Mx + c$, missä c on kiinteä vektori, sekä matriisille M pätee $\|M\| = L < 1$. Tutkitaan iteraatiota $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$. Osoita, että on voimassa arvio

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{1}{1-L}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|.$$

2. Osoita, että jos $\|A\| < 1$, niin $I + A$ on kääntyvä ja

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}.$$

3. Määrää syntyvä yhtälöryhmä, kun tehtävä

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in \Omega = (0,1) \times (0,1), \\ u(x,y) = 0, & (x,y) \in \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

ratkaistaan differenssimenetelmällä käyttäen hilaa, missä $h_x = 1/3$, $h_y = 1/4$ ja sisäpisteet ovat

$$(x_i, y_j) = (ih_x, jh_y), \; i = 1,2 \quad j = 1,2,3.$$

4. Etsitään tehtävälle

$$\begin{cases} -u''(x) + 3u(x) = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

ratkaisua elementtimenetelmällä. Valitse $h = \frac{1}{4}$, jolloin likiratkaisu on $\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^{3} c_i\varphi_i(x)$, missä $\varphi_i(x)$ on Courantin kantafunktio eli "hattufunktio". Kirjoita yhtälöryhmä kertoimien c_i ratkaisemiseksi, kun $f(x) \equiv 1$.

5. Olkoon A irredusoituvasti diagonaalisesti dominoiva matriisi.

   (a) Osoita, että yhtälöryhmän $Ax = b$ ratkaisemiseksi muodostettu Jacobin iteraatiomenetelmä suppenee. *(4p)*

   (b) Johda pohjustaja lähtien Jacobin menetelmästä. *(2p)*