Numeerinen analyysi

Loppukoe, 27.2.2006

HUOM! Valitse viisi tehtävää ja vastaa vain niihin.

1. (a) Millä parametrin $a \in \mathbb{R}$ arvoilla matriisi

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 2a \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

on (*i*) aidosti diagonaalisesti dominoiva (*ii*) irredusoituva?

(b) Olkoon x sellainen vektori, että $x = Mx + c$, missä c on kiinteä vektori, sekä matriisille M pätee $\|M\| = L < 1$. Tutkitaan iteraatiota $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$. Osoita, että on voimassa arvio

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{1}{1-L}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|.$$

2. Olkoon A $n \times n$-matriisi. Osoita, että $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|$ on vektorinormin $\|\cdot\|_\infty$ indusoima matriisinormi.

3. Olkoon A irredusoituvasti diagonaalisesti dominoiva matriisi.

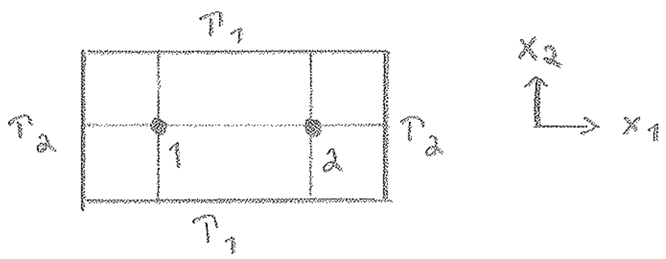
(a) Osoita, että yhtälöryhmän $Ax = b$ ratkaisemiseksi muodostettu Jacobin iteraatiomenetelmä suppenee. *(4p)*

(b) Johda pohjustaja lähtien Jacobin menetelmästä. *(2p)*

4. Olkoon Ω kuvan mukainen suorakulmio jonka kannan leveys on 4 yksikköä ja korkeus 2 yksikköä. Tehtävä

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = 1, & x = (x_1, x_2) \in \Omega, \\ u(x) = 1, & x \in \Gamma_1, \\ u(x) = 0, & x \in \Gamma_2, \end{cases}$$

missä reunaan Γ_1 kuuluu alueen x_1-akselin suuntaiset reunat ja reunaan Γ_2 x_2-akselin suuntaiset reunat, likiratkaistaan differenssimenetelmällä. Käytettävä hila ilmenee kuvasta. Määrää tällöin syntyvä matriisiyhtälö.



KÄÄNNÄ

5. Tarkastellaan gradienttimenetelmää vakioparametrilla α, $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha r^{(k)}$, $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, missä A on symmetrinen ja positiivisesti definiitti. Osoita, että menetelmä suppenee täsmälleen silloin, kun $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$, missä λ_n on matriisin A suurin ominaisarvo.

6. Tutkitaan tehtävän

$$(1) \qquad \begin{cases} (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x)\,, & x \in I = (a, b), \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases}$$

likiratkaisemista Rayleigh-Ritzin menetelmällä. Oletetaan, että $p \in C^1(\overline{I})$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q \in C(\overline{I})$, $q(x) \geq 0$ ja $f \in C(\overline{I})$. Olkoon

$$V = \{v \in C(\overline{I}) \,:\, v(a) = v(b) = 0, v'\text{on paloittain jatkuva}\}.$$

Asetetaan kaikilla $u, v \in V$

$$E(u) = \frac{1}{2}B(u, u) - (f|u), \qquad B(u, v) = (pu'|v') + (qu|v).$$

Tehtävän (1) likiratkaisua haetaan muodossa

$$(2) \qquad u_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x),$$

missä funktiot $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n} \subset V$ ovat keskenään lineaarisesti riippumattomia. Olkoon $V_n \subset V$ funktioiden $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n}$ virittämä reaalikertoiminen lineaariavaruus.

(a) Osoita, että yhtälöryhmällä

$$\sum_{j=1}^{n} B(\varphi_j, \varphi_k)c_j = (f \mid \varphi_k)\,, \quad k = 1, \ldots n$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

(b) Osoita, että funktio (2) varustettuna (a)-kohdan yhtälöryhmästä saatavilla kertoimilla c_j on se yksikäsitteinen funktio joka minimoi funktionaalin E avaruudessa V_n, ts.

$$E(u_n) = \min\{E(v) \,:\, v \in V_n\}.$$